

基于蒙特卡罗模拟的商业银行信用卡风险度量方法

周翔, 杨桂元

(安徽财经大学 统计与应用数学学院, 安徽 蚌埠 233030)

摘要:通过与 Matlab 程序相结合的方式介绍了基于蒙特卡罗模拟的商业银行信用卡风险度量方法, 该方法使在给定的置信水平下科学地估算国内商业银行的信用卡风险成为可能。

关键词:商业银行; 信用卡风险; 蒙特卡罗模拟; 度量方法

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1002-980X(2008)02-0053-05

信用卡风险是指金融市场中交易对手违约或信用品质潜在变化而导致损失的可能性, 它是我国商业银行面临的最主要的风险, 也是最难量化的风险之一。目前, 传统的度量方法和管理信用卡风险的手段已远不能应对当今社会发生的新情况和新问题, 更不能满足人们对信用卡风险进行科学量化度量 and 有效管理的需要。因此, 如何准确地度量信用卡风险、合理地管理信用卡风险已成为我国金融机构的当务之急。

目前国际上流行的信用卡风险度量方法有分析法和模拟法, 蒙特卡罗方法是一种随机模拟方法, 它又称为随机抽样技巧或统计试验方法。应用蒙特卡罗方法可以直接处理每一个风险因素的不确定性, 并把这种不确定性在成本方面的影响以概率分布的形式表示出来, 该方法在估计经济风险和工程风险中很常用。本文着重介绍蒙特卡罗模拟原理和如何用蒙特卡罗方法度量商业银行信用卡风险, 运用 Matlab 编程模拟实现。

1 蒙特卡罗模拟原理

蒙特卡罗模拟方法的基本思想是: 首先建立一个概率模型或随机过程, 使它的参数等于所求问题的解; 然后通过对概率模型或随机过程观察并计算求出参数的统计特征值; 最后给出所求问题的近似解, 解的精度可用估计值的标准误差表示。与一般的数学方法不同, 处理概率问题的经典数学方法常常是把概率问题变换为某个确定性问题去求解, 而蒙特卡罗方法正好与这种经典处理方法相反, 它把确定性问题与某个概率模型相联系, 把由大量随机

抽样试验求得的统计估计值作为原始问题的近似解。用蒙特卡罗模拟方法可以解决很多难以确定分布形式的变量参数问题。

假定已知某一参数的随机变量的概率模型(模型可为历史统计模型或数学解析式模型), 通过计算机产生的随机数程序多次模拟该随机变量出现的累计概率, 然后根据概率模型求出计算机模拟的随机变量的各种可能值; 经过反复无重复的抽样模拟, 尽可能多地得出或以尽可能高的精度来模拟随机变量所有的可能值; 然后统计模拟结果, 计算确定随机变量参数的特征值。对于任意的随机变量 x 来说, 它的累计概率分布函数的值都满足 $0 \leq F(x) \leq 1$ 。根据数理统计知识, 可很容易将它与一个在 $[0, 1]$ 区间服从均匀分布的随机变量联系起来。假定计算机能反复生成一个随机数 r , 并使 r 在 $[0, 1]$ 区间均匀分布。我们用计算机随机产生一个随机数的事件来代替实际生活中的某一随机事件, 这样就可以用这些不同的随机数来代替实际生活中某一随机变量发生的概率, 由随机变量的累计概率模型可得到每一随机事件发生时随机变量的实际值。

对于随机数 r 的累计概率分布函数 $F(r)$, 有 $0 \leq F(r) \leq 1$, 利用随机数 r 与随机变量 X 的累计概率分布函数 $F(r)$ 与 $F(x)$ 之间的关系, 每一个 X 值都有一个与之相联系的 $F(x)$ 的值。因而, 只要我们生成一个随机数 r , 令它等于累计分布函数 $F(x)$, 根据 $F(x)$ 与 x 的对应关系, 就可解出 x 。

下面是蒙特卡罗模拟的基本步骤:

1) 针对实际问题建立一个简单且便于实现的概

收稿日期: 2007-09-13

基金项目: 安徽省教育厅自然科学基金项目(kj2007b084)

作者简介: 周翔(1980—), 男, 安徽天湖人, 安徽财经大学统计与应用数学学院讲师, 研究方向: 数量经济学; 杨桂元(1957—), 男, 安徽萧县人, 安徽财经大学数量经济研究所所长, 教授, 研究方向: 数量经济学、金融工程。

率统计模型,使所求解恰好是所建模型的概率分布或其某个数字特征,比如是某个事件的概率(或该模型的期望值)。

2) 对模型中的随机变量采取抽样方法,在计算机上进行模拟试验,抽取足够的随机数,并对有关的事件进行统计。

3) 对模拟试验结果加以分析,给出所求解的估计及其精度。

4) 必要时,还应改进模型以提高估计精度和模拟计算的效率。

2 蒙特卡罗模拟信用风险损失分布方法

对于单项资产,只要根据权威评级机构对该项资产的评级数据,就可根据模拟方法确定资产在一年末的损失分布。但是,对于贷款组合损失分布的模拟就不那么简单了。由于贷款组合之间信用风险违约的相关性,我们在模拟 n 项资产组合信用风险损失分布时,不是模拟单项资产的价值之后再简单相加,这里涉及多变量的模拟以及多变量信用相关性的处理。对于多变量的模拟,特别是相关性的多变量,蒙特卡罗模拟需要进行随机数的转换。

下面给出用蒙特卡罗方法模拟资产组合的信用风险损失分布与计算风险值(VaR)的一般步骤。

2.1 估计违约概率和违约损失

我们可根据各债项的内部评级(或标准普尔、穆迪的外部评级)结果,对每一个债项分别赋予违约概率值。本文采用美国 J. P. 摩根公司推出的 Credit Metrics 模型评级和计算违约概率的方法。表 1 是各等级债项及其相对应的一年期违约概率值。

表 1 一年期各信用等级违约概率值 (%)

起始级别	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
违约概率	0	0	0.06	0.18	1.06	5.2	19.79

依据 J. P. 摩根公司和美国穆迪公司的最新模型发展,贷款的违约损失率服从 Beta 分布。为简化计算,我们将所有贷款分为有担保和无担保两类,所有的有担保债项和无担保债项的违约损失率(loss given default, LGD)服从各自的 Beta 分布,可根据 LGD 的历史数据估计出其 Beta 分布的参数。

2.2 估计债务人之间的资产相关性

本文通过行业类别之间的相关性计算其资产相关性。假定债务人 A 的资产收益 r^A 是行业收益 r 与债务人特定收益 r^B 的加权平均值,即

$$r^A = \alpha_1 r + \alpha_2 r^B \quad (1)$$

式(1)的实际意义是:债务人 A 的资产收益主要由其所属行业的收益决定,企业的特定信息则只决定残差部分。债务人的特定信息包括企业高层管理、财务状况、杠杆比率的质量和数量等方面的状况。

同理,债务人 B 的资产收益为 $r^B = \beta_1 r + \beta_2 r^B$, 它也由两部分组成:一部分与行业 r 相关,另一部分与企业的特定收益 r^B 相关。债务人的特定收益也称为各债务人的“特质收益”,现在假定特质收益是独立的,即 $(r^A, r^B) = 0$ 。在该假定下,很容易确定债务人 A 和债务人 B 的资产收益相关系数:

$$(A, B) = \alpha_1 \times \beta_1 \times \rho \quad (2)$$

式(2)中 ρ 指行业 r 和 r^B 的资产收益相关系数,可根据公开信息估计出来。下面介绍如何确定与行业相关的权重和与债务人特质收益相关的权重,只要确定了其中一个权重,另外一个权重就能推出。我们先确定与债务人特质收益相关的权重。

债务人的特定风险一般被认为是公司资产规模的函数。大公司的企业特定风险小,因为它们是企业市场基准的一部分,其经营状况更接近于整个市场的状况。而小公司则有较大的企业特定风险,因为它们的经营与市场指数或趋势相互独立,也就不大可能被选为市场的成分指数。可见,债务人的特定风险可被看作是资产规模的减函数。

根据 J. P. 摩根的信用管理模型,可将债务人特定风险表示为资产规模的函数,见式(3),图 1 是该模型的大致形状。

$$\text{债务人特定风险} = \frac{1}{2(1 + [\text{资产}]^e)} \quad (3)$$

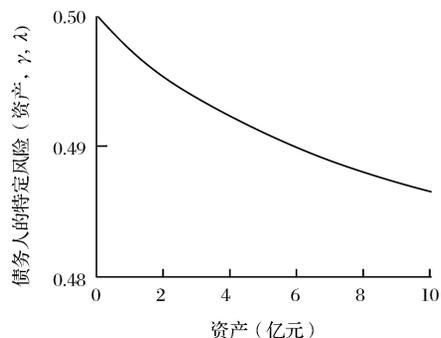


图 1 债务人的特定风险

图 1 中,估计参数为 $r = 0.4884$, $e = -13.49$ 。曲线的大致形状可能是正确的,但是拟合参数还需要根据国内市场的情况进行深入分析。我们现在暂

不对该曲线的函数形式进行严格求证,只指明它尚需进一步完善。目前,我们暂用这一给定的结果。

2.3 产生相关的违约事件

2.3.1 产生信用相关的多变量随机数

在一个包含 N 个债务人的资产组合中,其中每一笔贷款都有一个随机数与之对应,以此确定债务人是否违约。设一个包含 N 个独立的标准正态分布的随机变量的 N 维向量为:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ N \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, $0 < i < N$,且满足 $i \sim N(0,1)$ 。为使向量中的随机变量两两相关,必须进行如下转换:

$$u_p = \sum_{p=1}^N m_{up} \cdot u_p \quad (5)$$

以矩阵形式表示为: $u = M \cdot u$ 。 (6)

现在的任务是找到合适的转换矩阵 M ,以使随机向量 u 转变为拥有特定协方差结构的多变量标准分布。下面将集中讨论该问题。

两个相关变量之间的相关系数表示为: ρ_{jk} ,其中括号 $*$ 表示期望值。因为随机向量服从正态分布,所以 $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, $\rho_{ii} = 1$ 。若以矩阵的形式表示,则相关系数矩阵为:

$$\rho = (\rho_{ij})^T = M^{-1} M^{-T} = M M^T \quad (7)$$

根据上述方法,我们将协方差矩阵 ρ 作为已知条件,然后用式(6)生成相关的随机数,但在此之前,必须对式(7)进行分解, ρ 的“平方根”即为转换矩阵 M 。一旦得出 M ,相关随机变量 u 就能够通过式(7)计算出来。

2.3.2 计算矩阵的平方根

计算矩阵的平方根有多种方法,最直接的方法是使用乔里斯基分解(Cholesky decomposition)。下面简单介绍乔里斯基分解法。

乔里斯基分解是指将已知的正定矩阵 ρ 分解为:

$$\rho = A A^T \quad (8)$$

A 和 A^T 分别是下三角矩阵和上三角矩阵,对角线元素均不为零。显然,对于 3×3 矩阵,分解后为:

$$A = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

当以这种方式表示时,很容易推导出 A 中的元素与 ρ 中元素的关系,其中 A 的对角线元素满足

$$a_{ii} = \left[s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a_{ki} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

而 A 非对角线上的元素满足

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left[s_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a_{jk} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

2.3.3 计算违约点

通过以上方法,可计算出组合中每个工具的资产价值(服从正态分布)。“工具”通常指贷款、债券或其他承担违约风险的应收款。每项工具都对应一个相关随机变量 i , i 服从均值为 0、标准差为 1 的标准正态分布。在模拟过程中,以上这种对应关系被用来确定工具所对应的债务人是否会违约。

现在,我们已得出以下结论:相关资产价值服从正态分布,即 $i \sim N(0,1)$;以 EDF_i 表示的相应的违约概率是已知的。

第 i 个债务人的违约临界点 $DP_i = N^{-1}(EDF_i, 0, 1)$,其中 $N^{-1}(\cdot)$ 是反累积正态分布。因而,第 i 个债务人违约的判定标准为式(12)所示:

$$\begin{cases} \text{若 } i < DP_i, \text{ 则违约} \\ \text{若 } i \geq DP_i, \text{ 则不违约} \end{cases} \quad (12)$$

如果根据已知条件计算出的资本价值低于违约临界点,那么该工具处于违约状态。图 2 对此进行了直观显示。

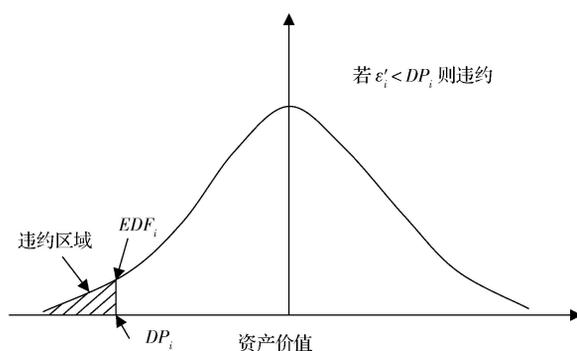


图 2 违约点

2.4 产生随机的违约损失率

对于在上一步找出的每个处于违约状态的债务人,很有必要确定其相应的既定违约损失。由于合约的内部结构各不相同, LGD 是一个服从未知分布的随机变量,因而也应该用一个随机数来对该随机

变量进行模拟。在第一步中,我们将工具简单分成了有担保和无担保两类,并且估计出了各自服从的 Beta 分布的参数,因此我们只需要将各笔债项分类,产生服从各自分布的随机数,以此便可代替各自的违约损失率了。

2.5 计算组合损失

给定前面的模拟场景,如果一个债务人发生了违约,则违约损失等于违约敞口乘以违约损失率;如果债务人没有违约,则损失记为零。将组合中的所有债务人的损失加起来,就可得到整个信用资产组合的全部损失,即

$$\text{损失} = \sum_{\text{违约敞口}} (\text{调整的风险暴露})_i \times LGD_i \quad (13)$$

2.6 得到损失分布和 VaR 值

重复前面所有的步骤,如重复 10000 次,就可得到 10000 个不同场景下的组合损失。将这 10000 个组合损失表现在概率分布图上,得到的就是模拟的组合损失分布。同时,可根据给定的置信水平得到 VaR 值。

3 实例分析

现举例说明如何用蒙特卡罗方法模拟信用风险。

假设某商业银行有 20 笔企业贷款,各笔贷款的额度可用向量表示为 $P = (1.28e + 06, 1.34e + 06, \dots, 3.2e + 07)$;这些贷款企业的资产为 $C = (5.0e + 08, 2.0e + 06, \dots, 6.3e + 07)$;这些企业的信用等级为 $A = (2, 5, 4, \dots, 3)$,其中 1 代表 AAA 级,2 代表 AA 级,依次类推;贷款企业的所属行业 $D = (1, 7, 3, \dots, 9)$,其中数字分别代表各企业所属的行业;贷款是否有担保表示为 $F = (0, 1, 0, \dots, 1)$,其中 0 表示无担保,1 表示有担保。另外,各等级的贷款违约损失率表示为 $B = (0, 0, 0.0006, 0.0018, 0.0106, 0.052, 0.1979)$,有担保债项和无担保债项分别服从 Beta(1.5, 4) 和 Beta(2.5, 3) 的分布。为简化计算,我们将行业暂时分为 10 个,行业相关系数矩阵为 Q (矩阵中的举例数值见附录,实际应用中可用各行业的资产收益率的相关系数来替代)。

本例采用 Matlab 编程,进行了 10000 次的蒙特卡罗模拟,模拟得到的结果如图 3 所示,具体程序参见附录。

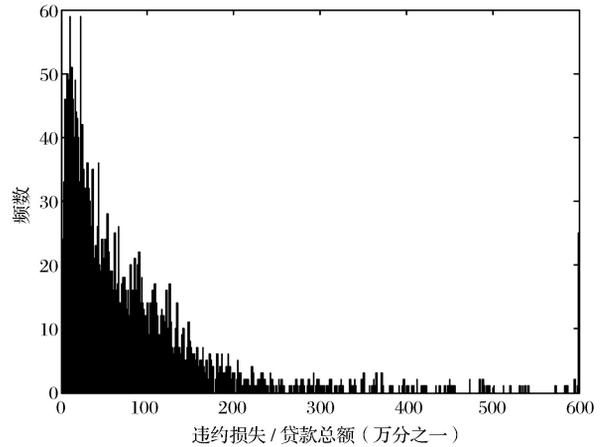


图 3 损失分布模拟结果

从图 3 可看出,违约损失比率为 6% 处的值很大,这是为了图形清晰将损失比率超过 6% 的次数全部设为 6%。根据模拟损失分布的结果可知,置信度为 99% 的一年期内违约损失与贷款总额的比率为 3.37%。

从目前来看,我国银行计算 VaR 的不多,而使用蒙特卡罗模拟方法度量信用风险的更没有,这主要是因为该方法尚未被各银行所掌握。当然,本文所介绍的方法还需进一步完善,但如果能有一种科学的方法来量化银行信用风险,将有利于风险管理者正确把握风险,更好地控制风险,为风险管理政策和措施的制定提供一个客观的依据。

参考文献

- [1] 菲利普·乔瑞. VAR: 风险价值——金融风险管理新标准 [M]. 北京: 中信出版社, 2000.
- [2] 罗伟成. 结构蒙特卡罗方法在度量信贷风险中的应用 [J]. 北方工业大学学报, 2004(3): 71-74.
- [3] 李志辉. 内部信用风险模型——资本分配和绩效度量 [M]. 天津: 南开大学出版社, 2004.
- [4] 赵先信. 银行内部模型与监管模型——风险计量与资本分配 [M]. 上海: 上海人民出版社, 2004.
- [5] 孙洪娟. 商业银行信用风险分析的主要技术 [J]. 统计研究, 2002(10): 57-59.
- [6] 李宗怡. 银行内部信用风险模型评述 [J]. 经济导刊, 2002(4): 51-55.
- [7] MORGAN J P. Risk Metrics Technical Document [M]. New York: McGraw-Hill Trade, 1996.
- [8] ACKSON P, PERRAUDIN W. Regulatory implications of credit risk modelling [J]. Journal of Banking and Finance, 2000, 24: 1-14.
- [9] ARTZNER P. Coherent measure of risk [J]. Math. Finance, 1999(3): 203-208.

(下转第 80 页)

附录 Matlab 程序代码

输入原始数据

```
C = (5.0e+08;2.0e+06;7.3e+07;1.4e+07;6.9e+09;3.5e+08;2.9e+07;7.3e+09;1.4e+08;
5.5e+07;5.2e+08;3.3e+06;7.6e+07;1.9e+08;8.9e+06;4.7e+08;2.4e+06;9.3e+08;2.4e+07;
6.3e+07);
```

```
P = (1.28e+06;1.34e+06;5.3e+06;8.3e+05;1.6e+07;4.7e+06;3.6e+06;9.1e+06;3.6e+06;
1.1e+06;2.1e+07;8.9e+05;2.6e+06;3.9e+06;6.3e+05;7.8e+06;1.4e+06;1.6e+07;8.4e+06;
3.2e+07);
```

```
D = (1;7,3,4,2,6,3,8,9,5,1,9,6,4,7,2,10,9,5,9)
```

```
A = (2,5,4,3,5,4,7,1,5,4,3,6,4,5,6,2,6,1,5,3)
```

```
F = (0,1,0,1,1,0,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1)
```

```
B = (0,0,0.0006,0.0018,0.0106,0.052,0.1979)
```

```
Q = [ 1 0.5 0.6 0.3 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 0.7
      0.5 1 0.7 0.4 0.6 0.3 0.5 0.6 0.7 0.65
      0.6 0.7 1 0.4 0.3 0.7 0.4 0.5 0.6 0.8
      0.3 0.4 0.4 1 0.7 0.5 0.7 0.4 0.5 0.9
      0.5 0.6 0.3 0.7 1 0.4 0.7 0.6 0.7 0.5
      0.6 0.3 0.7 0.5 0.4 1 0.8 0.7 0.4 0.5
      0.7 0.5 0.4 0.7 0.7 0.8 1 0.9 0.4 0.6
      0.8 0.6 0.5 0.4 0.6 0.7 0.9 1 0.3 0.7
      0.9 0.7 0.6 0.5 0.7 0.4 0.4 0.3 1 0.3
      0.7 0.65 0.8 0.9 0.5 0.5 0.6 0.7 0.3 1 ]
```

计算相关系数矩阵

```
F1 = not(F); E = norminv(B,0,1);
```

```
W = 1 - (1 + (C ^ 0.4884) * (exp(-13.49))) . 0.5;
```

```
DP = E(A); r = zeros(20);
```

```
for i = 1 20
```

```
    for j = 1 20
```

```
        r(i,j) = W(i) * W(j) * Q(D(i),D(j));
```

```
    end
```

```
end
```

计算贷款总额

```
T = 0;
```

```
for i = 1 20
```

```
    r(i,i) = 1; T = T + P(i);
```

```
end
```

乔里斯基分解

```
R = chol(r)
```

```
[R,p] = chol(r)
```

蒙特卡罗模拟

```
L = linspace(0,0,10000);
```

```
for i = 1 10000
```

```
    X = randn(20,1); Y = R * X; Z = (Y < DP);
```

```
    G1 = betarnd(1.5,4,20,1)
```

```
    G2 = betarnd(2.5,3,20,1)
```

```
    LGD = (G1 * F + G2 * F1) * Z
```

```
    L(i) = dot(P,LGD);
```

```
end
```

```
H = floor(L * 10000 / T);
```

```
K = linspace(0,0,600);
```

```
for i = 1 10000
```

```
    if H(i) >= 600
```

```
        K(600) = K(600) + 1;
```

```
    else if H(i) == 0
```

```
        K(1) = 0;
```

```
    else K(H(i) + 1) = K(H(i) + 1) + 1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
J = 0.5 1 599.5;
```

```
bar(J, K)
```

法人尽其用的现象。各级政府部门要继续抓好农村劳动力的转移工作,同时要考虑到农业生产决策者的兼业特征对农户水稻生产存在的负向影响,尽快制定完善土地流转的相关政策,以期实现水稻生产农户层面上的合适规模。

参考文献

- [1] 黄季,王巧军,陈庆根.农业生产资源的合理配置研究:水稻生产的投入产出分析[J].中国水稻科学,1995,9(1):39-44.
- [2] 胡瑞法,黄季.农业生产投入要素结构变化与农业技术发展方向[J].中国农村观察,2001(6):9-16.
- [3] 周四军.对我国粮食生产影响因素的计量分析[J].统计与决策,2003(4):41-42.
- [4] 伍山林.中国粮食生产区域特征与成因分析——市场化改革以来的实证分析[J].经济研究,2000(10):38-45.
- [5] 乔世君.中国粮食生产技术效率的实证研究——随机前沿生产函数的应用[J].数理统计与管理,2004(5):11-16,64.
- [6] 王明利.我国粳米生产、消费和贸易的研究[D].北京:中国农业科学研究院,2003.
- [7] 王芳.我国籼米生产、消费和贸易的研究[D].北京:中国农业科学研究院,2004.
- [8] 刘会云,张阳明,林振山.建国以来江苏省粮食产量变化的多时间尺度分析[J].资源科学,2004(1):107-112.
- [9] 徐梦洁,彭补拙.江苏省粮食产量吸引子维数研究[J].人文地理,2001(1):53-56.
- [10] 胡冰川,吴强,周曙东.粮食生产的投入产出影响因素分析[J].长江流域资源与环境,2006(1):71-75.
- [11] CHENG E J. Household heads, non-economic factors and grain production in China in the 1990s[C]. Working Paper Chinese Economies Research Centre School of Economics in the University of Adelaide Australia, 1998.
- [12] 孔祥智,庞晓鹏,张云华.北方地区小麦生产的投入要素及影响因素实证分析[J].中国农村观察,2004(4):1-7.
- [13] 廖洪乐.中国南方稻作区农户水稻生产函数估计[J].中国农村经济,2005(6):11-18.
- [14] GREENE W H. Econometrics Analysis[M]. 4th ed. Prentice Hall, 1997:576-578.

Empirical Study on Input Factors and Influence Factors of Rice Production in Jiangsu Province

Jing Fei

(School of Economics, Anhui University of Technology, Ma'anshan Anhui 243002, China)

Abstract: The most primary food crop in Jiangsu is rice. Based on the expanded C-D production function, this paper empirically analyses the effects of input factors and influence factors including the variety cognition and the individual characteristic of agricultural production decision-maker on rice production. From the micro-household perspective, 354 cross-sectional household cases in 22 counties of the year 2005 are selected for this analysis. The estimate result indicates that nowadays the cultivated land is the most important factor influencing rice production in Jiangsu and the chemical fertilizer plays an important role in rice production. Along with the cooperation of the improved rice variety and the good planting method, the importance of the rice variety cognition of peasant households to rice production are more and more evident. Because the condition of farming irrigation obviously influences the rice production, the government must enlarge the investment on farmland water conservancy.

Key words: input factor; influence factor; production function; rice production

(上接第 56 页)

Measurement Method of Credit Risk of Commercial Bank Based on Monte Carlo Simulation

Zhou Xiang, Yang Guiyuan

(School of Statistics & Applied Mathematics, Anhui University of Finance & Economics, Bengbu Anhui 233030, China)

Abstract: This paper introduces the method of measuring credit risk of commercial bank based on Monte Carlo simulation in the way which is combined with Matlab procedure. This method makes it possible to measure credit risk of commercial bank of China under the given confidence level.

Key words: commercial bank; credit risk; Monte Carlo simulation; measurement method